SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

$$a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + \dots + a_{1n} x^n = b_1$$
$$a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + \dots + a_{2n} x^n = b_2 \qquad (*)$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x^1 + a_{m2} x^2 + \dots + a_{mn} x^n = b_m$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in P$, $x^1, \dots, x^n$ neznámé

je SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH.

Př.: 1) $2x = 7$

2) $2x^1 + x^2 + 3x^3 = 6$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in P^n$ je ŘEŠENÍ soustavy $(*)$, jestliže $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$a_{i1} x_0^1 + a_{i2} x_0^2 + \dots + a_{in} x_0^n = b_i$$

Př.: $0 \cdot x = 5$ nemá řešení

$x = 5$ má řešení $x = 5$

$0 = 0$ má nekonečně mnoho řešení

$x^1 + x^2 = 0$ má nekonečně mnoho řešení

množina všech řešení je

$$\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 = -x^2\}$$

Množina všech řešení soustavy se nazývá OBECNÉ ŘEŠENÍ.

matice A typu $m \times n$, kde $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá MATICE SOUSTAVY $(*)$.

Matice $\overline{A}$ typu $m \times (n+1)$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se nazývá ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY $(*)$.

matice $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ se nazývá SLOUPEC PRAVÝCH STRAN.

matice $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ je SLOUPEC NEZNÁMÝCH.

Soustavu $(*)$ můžeme zapsat $Ax = b$.

HOMOGENNÍ SOUSTAVY ROVNIC

Soustava (*) se nazývá HOMOGENNÍ, jestliže $b_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Homogenní soustava má řešení – NULOVÉ.

P^n, $x_1, \dots, x_k \in P^n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in P$.

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in P^n$

nazývá se LIN. KOMBINACE prvků $x_1, \dots, x_k$.

$x_1, \dots, x_k$ jsou LIN. NEZÁVISLÉ, jestliže

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Pokud $x_1, \dots, x_k$ nejsou lin. nezávislé, nazývají se LIN. ZÁVISLÉ.

<u>Tvrzení</u> Lin. kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy.

<u>Důkaz</u> x_1, x_2 jsou řešení. $Ax_1 = 0, Ax_2 = 0$

$\alpha_1, \alpha_2 \in P$

$$A \cdot (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A \cdot \alpha_1 x_1 + A \alpha_2 x_2 =$$
$$= \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0.$$

Množina řešení soustavy se nazývá FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ, jestliže jsou ta řešení lin. nezávislá a každé řešení je jejich lin. kombinací.

Počet prvků fundamentálního systému řešení je $n - \mathrm{rk} A$.

$x^1 + x^2 = 0 \qquad (1 \ \ 1) \qquad (1, -1)$

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY ROVNIC

sloupec pravých stran není nulový.

$Ax = b$.

Soustava $Ax = 0$ se nazývá HOMOGENIZOVANÁ.

<u>Tvrzení</u> Buď x_0 řešení $Ax = b$. Pak je množina všech řešení soustavy $Ax = b$ rovna

$$\{ x + x_0 \mid x \text{ je řešení soustavy } Ax = 0 \}.$$

<u>Frobeniova věta</u> Soustava $Ax = b$ má aspoň jedno řešení $\iff$ $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$.

$$\bar{A} = (A \mid b) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

Tvrzení Nehomogenní soustava $Ax=b$ s invertibilní čtvercovou maticí A má pro každé b jediné řešení

$$x = A^{-1} b.$$

Cramerovo pravidlo Buď $Ax=b$ nehomogenní soustava s invertibilní čtvercovou maticí A a řešením $x=(x^1,\dots,x^n)$. Pak

$$x^i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A záměnou i-tého sloupce sloupcem pravých stran b.